ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2024

Законы нуля и единицы

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ задана последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$.
Пусть $\mathcal{F}_1^n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ есть σ-алгебра, порождённая случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$, а $\mathcal{F}_n^\infty = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ — σ-алгебра, порождённая случайными величинами $X_n, X_{n+1}, \ldots$, и пусть

$$\mathcal{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^\infty.$$

Поскольку пересечение σ-алгебр есть снова σ-алгебра, то $\mathcal{X}$ является σ-алгеброй. Эта σ-алгебра называется *хвостовой* или *остаточной*, в связи с тем, что всякое событие $A \in \mathcal{X}$, также называемое *остаточным*, не зависит от значений случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ для любого n, а определяется лишь поведением сколь угодно далёких значений последовательности $X_1, X_2, \ldots$

Законы нуля и единицы

Поскольку для любого $k \geqslant 1$ событие

$$A_1 = \left\{ \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ сходится} \right\} = \left\{ \text{ряд } \sum_{n=k}^{\infty} X_n \text{ сходится} \right\} \in \mathcal{F}_k^{\infty},$$

то $A_1 \in \mathcal{X}$.

Следующие события также являются остаточными:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{\text{предел } \lim_{n\to\infty} S_n \text{ существует}\};\\
A_3 &= \{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < C\};\\
A_4 &= \{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \ln\ln n}} = 1\};\\
A_5 &= \{X_n \in B_n \text{ для бесконечно многих } n\}, \quad B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

С другой стороны, событие $\{\limsup_{n\to\infty} S_n > 0\}$, вообще говоря, не является остаточным.

Если случайные величины $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ независимы, то из леммы Бореля — Кантелли следует, что

$$\mathsf{P}(A_5) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_n \in B_n) < \infty;$$

$$\mathsf{P}(A_5) = 1 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_n \in B_n) = \infty.$$

Таким образом, вероятность события A_5 может принимать лишь два значения 0 или 1 в зависимости от сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_n \in B_n)$. Это утверждение является частным случаем следующей теоремы.

Законы нуля и единицы

Теорема 5.1 (**закон 0 и 1 Колмогорова**)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин и* $A \in \mathcal{X}$*. Тогда вероятность* $\mathsf{P}(A)$ *может принимать лишь два значения:* $\mathsf{P}(A) = 0$ *или* $\mathsf{P}(A) = 1$*.*

Доказательство

Так как A — остаточное событие, то $A \in \mathcal{F}_{n+1}^{\infty}$, $n \geqslant 0$. Поэтому событие A не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_1^n$ при любом n, т. е. для каждого $n \geqslant 1$ и для любых $A_n \in \mathcal{F}_1^n$

$$\mathsf{P}(A \cap A_n) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(A_n).$$

Если мы покажем, что события $A_n \in \mathcal{F}_1^n$ можно выбрать так, что

$$\mathsf{P}(A_n) \to \mathsf{P}(A) \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(A \cap A_n) \to \mathsf{P}(A), \tag{5.1}$$

то получим, что $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}^2(A)$, и, значит, $\mathsf{P}(A) = 0$ или 1.

Доказательство

Обозначим $A \triangle B = A\overline{B} \cup \overline{A}B$ *симметрическую разность* множеств A и B.
Рассмотрим класс $\mathcal{E}$, состоящий из всех таких событий $A \in \mathcal{F}$, что для любого $\delta > 0$ существуют $n \geqslant 1$ и $B \in \mathcal{F}_1^n$ такие, что $\mathsf{P}(A \triangle B) < \delta$.
Покажем, что $\mathcal{E}$ — σ-алгебра.
Так как $\mathsf{P}(B \triangle B) = 0$, то $\mathcal{F}_1^n \subseteq \mathcal{E}$ для любого $n \geqslant 1$ и, следовательно, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_1^n \subseteq \mathcal{E}$. Если $B \in \mathcal{E}$, то и $\overline{B} \in \mathcal{E}$, так как $\overline{A} \triangle \overline{B} = A \triangle B$.

Доказательство

Пусть $\delta > 0$ и пусть $B_n \in \mathcal{E}$, $n \geqslant 1$, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда по лемме 3.1 (i) существует $m \geqslant 1$ такое, что $\mathsf{P}\Big(B \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j\Big) < \delta/2$.

Из определения класса $\mathcal{E}$ следует, что для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, существуют n_j и $C_j \in \mathcal{F}_1^{n_j}$ такие, что $\mathsf{P}(B_j \triangle C_j) < \delta/(2m)$.

Доказательство

Положим $n = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} n_j$ и $C = \bigcup\limits_{j=1}^{m} C_j$. Тогда $C \in \mathcal{F}_1^n$ и так как $(A\cup B)\triangle C \subseteq A\cup(B\triangle C)$ и

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right)\triangle\left(\bigcup_{j=1}^{m} C_j\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m}(B_j\triangle C_j),$$

то

$$\mathsf{P}(B\triangle C) \leqslant \mathsf{P}\left(B\setminus\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) + \sum_{j=1}^{m}\mathsf{P}(B_j\triangle C_j) < \delta.$$

Доказательство

Таким образом, $B \in \mathcal{E}$, и, следовательно, $\mathcal{E}$ образует σ-алгебру, содержащую $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_1^n$. Но $\mathcal{F}_1^\infty = \sigma(X_1, X_2, \ldots) = \sigma\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_1^n\big)$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_1^n$. Значит, $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{F}_1^\infty$.

Так как $A \in \mathcal{X}$, то $A \in \mathcal{F}_1^\infty \subseteq \mathcal{E}$. Следовательно, существуют такие события $A_n \in \mathcal{F}_1^n$, $n \geqslant 1$, что $\mathsf{P}(A \triangle A_n) \to 0$. Отсюда следуют соотношения (5.1) в силу того, что

$$|\mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A_n)| \leqslant \mathsf{P}(A \triangle A_n) \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap A_n) \leqslant \mathsf{P}(A \triangle A_n).$$

$\square$

Из теоремы 5.1 следует, в частности, что если случайные величины $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ независимы, то вероятности таких событий, как $\left\{\text{ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n \text{ сходится}\right\}$ и $\{\text{предел } \lim\limits_{n\to\infty} S_n \text{ существует}\}$, могут быть только 0 или 1.

Отметим ещё одно простое следствие теоремы 5.1.

Следствие 5.1

Пусть X — случайная величина, измеримая относительно остаточной σ-алгебры $\mathcal{X}$, т. е. $\{X \in B\} \in \mathcal{X}$ для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Тогда существует постоянная c, $-\infty \leqslant c \leqslant \infty$, такая, что $\mathsf{P}(X = c) = 1$.